

АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РЕНТГЕНОВСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ С КОНУСНЫМ ПУЧКОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Е.Н. Симонов, К.М. Виноградов
Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет), Челябинск

Цель: Разработка алгоритма реконструкции трехмерных изображений в рентгеновской компьютерной томографии (КТ) с конусным пучком излучения.

Материал и методы: Предложен новый подход к разработке алгоритма реконструкции. Алгоритм основан на точном аналитическом представлении трехмерного преобразования Радона проекционных данных. Для такого представления введена итерационно-инвариантная функция рассеяния точечного источника (ФРТ).

От существующих приближенных алгоритмов Фельдкампа, Кацевича и других авторов разработанный алгоритм отличается повышенной точностью, применим для высокопроизводительной спиральной рентгеновской компьютерной томографии, обеспечивает практически реализуемую конструкцию рентгено-оптического тракта томографа.

Результаты: Выполнено математическое моделирование разработанного алгоритма трехмерной реконструкции для спиральной траектории источника излучения, получены удовлетворительные результаты на модели фантома, имитирующего объект исследования с контрастными вставками. Показано влияние расстояния источника излучения от центра координат по отношению к радиусу объекта исследования, для чего была разработана математическая модель специального фантома в форме куба, состоящего из отдельных равномерных эллиптических пластин (эллипсоидов) одинаковой плотности.

Проведена оценка качества реконструируемых томографических изображений посредством определения меры различия изображения сечения модели фантома и реконструированного изображения, представленной как среднеквадратическая погрешность.

Заключение: Исследования показали, что для соотношения радиуса спиральной траектории к радиусу объекта (R/R_m), равному около 3,0, т.е. при достаточно больших углах конуса излучения источника, разработанный алгоритм трехмерной реконструкции с конусным пучком излучения дает томографическое изображение высокого качества. Это может быть применено при разработке медицинских рентгеновских компьютерных томографов.

Ключевые слова: рентгеновская компьютерная томография, конусный пучок излучения, двумерное и трехмерное преобразование Радона, трехмерные алгоритмы реконструкции изображения

DOI: 10.52775/1810-200X-2023-99-3-28-39

Введение

Современный этап развития рентгеновской компьютерной томографии (КТ) применительно к медицине характеризуется переходом от классического послойного двумерного исследования объекта к трехмерному. Эта тенденция подразумевает переход от линейки детекторов к двумерному массиву детекторов, от плоской траектории движения источника рентгеновского излучения – к криволинейной, от веерной геометрии сбора данных – к конусной. Все это позволяет более эффективно использовать излучение источника, уменьшить время исследования и дозу облучения пациента, повысить качество реконструкции и получить напрямую трехмерное томографическое изображение исследуемого объекта.

Существующие методы трехмерной реконструкции томографических изображений, основанные на одномерном или двумерном преобразовании Радона по лучам или плоскостям с введением интерполяционных поправок на конусность излучения, являются приближенными для кругового сканирования и не применимы для быстродействующей спиральной схемы сканирования, которая в настоящее время является наиболее практически востребованной в медицинской практике.

Целью настоящей работы явилось получение точного метода трехмерной реконструкции, основанного на трехмерном преобразовании Радона, для спиральной схемы сканирования.

Основные ключевые моменты настоящей статьи:

1. Определение связи лучевой суммы (проекции) и трехмерного преобразования Радона для реконструкции физического параметра μ (коэффициента линейного ослабления рентгеновского излучения) в любой точке исследуемого объема.
2. Определение обратного трехмерного преобразования Радона для нахождения параметра μ , представление преобразования через введение произвольной функции рассеяния точечного источника (ФРТ), инвариантной к сдвигу. Сведение задачи нахождения параметра μ к определению свертки проекций с произвольной ФРТ.
3. Определение алгоритма трехмерной реконструкции томографических изображений по конусным проекциям для спиральной схемы сканирования.

4. Вычислительные эксперименты на моделях фантомов для оценки точности алгоритма трехмерной реконструкции.

Структура данной работы такова. Раздел 1 содержит обзор работ, посвященных разработке алгоритмов реконструкции трехмерных изображений для рентгеновской компьютерной томографии. В разделе 2 рассматривается предлагаемый подход к решению задачи. В разделе 3 представлено описание метода трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям для спиральной траектории источника излучения. В разделе 4 представлен алгоритм трехмерной реконструкции. Вычислительные эксперименты и их результаты представлены в разделе 5. Последний раздел содержит заключение и выводы.

1. Обзор литературы

Высокая практическая значимость трехмерной КТ инициировала множество исследований в данной области [1–20]. При этом общая формулировка задачи осталась неизменной: восстановление функции по ее интегралам вдоль прямых, а подходы к решению трехмерной задачи схожи с теми, что применяются в классической двумерной КТ [6, 7, 21]. Разрабатывались как алгебраические, так и аналитические методы.

С тех пор как была предложена первая схема с двумерным детектором, естественной тенденцией было найти применение классическим методам реконструкции, которые предполагали обобщение и расширение на трехмерный случай. Так появились приближенные методы решения трехмерной задачи.

Самым простым подходом стала идея использования веерных алгоритмов двумерной КТ для решения трехмерной задачи. Идея состоит в следующем. Предполагается, что значения интегралов на детекторе определяются на прямых горизонтальных линиях, находящихся в параллельных плоскостях, перпендикулярных плоскости движения источника, и как бы полученные в веерах лучей при поступательном движении источника излучения по вертикали. Следствием такого решения задачи трехмерной томографической реконструкции являются артефакты на изображении и низкое качество реконструкции в плоскостях, отстоящих от плоскости вращения источника.

Один из первых трехмерных алгоритмов реконструкции был предложен в Фельдкампом [1]. В нем производится построчная фильтрация сверткой, подобно тому, как это делается в классической двумерной КТ с веерной схемой сканирования, а полная геометрия конусной схемы учитывается только на этапе вычисления обратной проекции. Алгоритм дает приближенное решение для круговой траектории, обеспечивает хорошее качество восстановления, но не учитывает угол конуса (с увеличением угла растут ошибки реконструкции), требует больших затрат компьютерного времени, хотя и превосходит по скорости классический подход и некоторые итерационные методы.

В связи с этим было предложено несколько модификаций алгоритма Фельдкампа. Основное внимание было уделено созданию быстроедействующих алгоритмов и исследованию возможных обобщений, связанных с усложнением способа сбора проекционных данных. Так, в [2] предложен алгоритм, получивший название обобщенной параллельной обратной проекции (EPBP – extended parallel backprojection). От классического алгоритма Фельдкампа этот метод отличается применением перепаковки к параллельным данным с детекторов и тем, что его применение не ограничено плоскими траекториями движения.

Альтернативой алгоритмам, основанным на методе Фельдкампа, служит модернизированный алгоритм однослойной перепаковки (ASSR – advanced single-slice rebinning) [3]. Основная идея данного алгоритма заключается в том, что изображения не обязательно реконструировать в плоскостях, строго параллельных координатным плоскостям прямоугольной декартовой системы координат. Вместо этого реконструкция осуществляется в наклонных плоскостях, оптимально вписанных в спиральную траекторию источника излучения. В этом случае, строго говоря, форма среза отличается от идеальной плоскости, но этим отклонением можно пренебречь без заметного ухудшения качества реконструкции. На последнем этапе реконструкции выполняется интерполяция, результатом которой являются томограммы в стандартной системе координат.

Разработка аналитического алгоритма, обеспечивающего оптимальное качество изображений, представлена А. Кацевичем в [4]. Алгоритм достаточно теоретически точен, имеет структуру FBP-алгоритма (FBP – filtered backprojection), основан на связи между преоб-

разованием в конусе лучей, прямом и обратном преобразовании Радона в трехмерном пространстве. Однако этот алгоритм разработан для круговой траектории источника излучения и является сложным, громоздким для вычислений, также он является приближенным.

В настоящей работе рассматривается новый подход в разработке алгоритма прямой реконструкции трехмерных изображений для спиральной траектории источника, охватываемой протяженные объекты исследования.

2. Предлагаемый подход к решению задачи трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям

Для точного восстановления трехмерной функции $\mu(\mathbf{r})$ (для рентгеновского излучения это линейный коэффициент ослабления), $\mathbf{r}=(x,y,z)\in R^3$ по данным конусных проекций необходимо, чтобы они удовлетворяли условию полноты Кириллова–Смита–Туя [22, 23]. Для этого необходимо, чтобы каждая плоскость, проходящая через исследуемый объект, по крайней мере, один раз должна пересекать траекторию движения источника излучения. Примеры схем сканирования с траекторией движения источника, удовлетворяющих этому условию: спиральная, две окружности, окружность и прямая, две окружности, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях [5].

Математически задачу можно определить, как поиск функции объекта μ из уравнения лучевой суммы:

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \mu(\mathbf{s} + \mathbf{t}\mathbf{u}) dt, \quad (1)$$

которое описывает интегрирование по линии с началом в точке \mathbf{s} и в направлении $\mathbf{u}\in S^2$, где S^2 находится в единичной сфере R^3 . Формула (1) описывает геометрию трехмерной визуализации $\mu(\mathbf{r})$ по проекциям $g(\mathbf{s}, \mathbf{u})$, где вектор $\mathbf{s}\in R^3$ представляет положение источника на орбите; $\mathbf{s} + \mathbf{t}\mathbf{u}$ – уравнение прямой в векторно-параметрическом виде (рис. 1).

Одним из путей обращения интеграла выражения (1) является применение трехмерного преобразования Радона [24], согласно которому

$$P(\mathbf{n}, \mathbf{s}) = \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{s} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{r}, \quad (2)$$

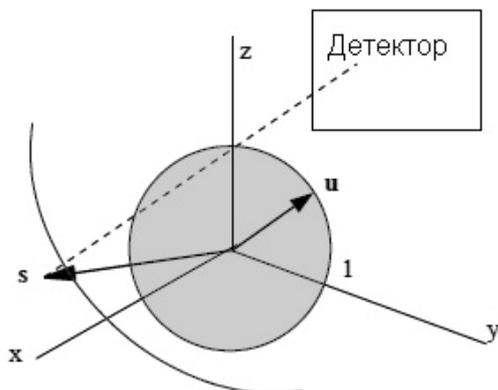


Рис. 1. Геометрия сканирования конусным пучком. Множество функции $\mu(\mathbf{r})$ объекта показано в виде шара с единичным радиусом серого цвета. Положение источника на пути вокруг объекта задано вектором \mathbf{s} . Интеграл взят вдоль пунктирной линии, которая параллельна вектору \mathbf{u} . Проекции конусно-го пучка собраны вращением вектора \mathbf{u}

где символ “ \cdot ” обозначает скалярное произведение, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + s = 0$ – векторное уравнение плоскости.

Трехмерное преобразование Радона описывает интегрирование $\mu(\mathbf{r})$ в плоскости перпендикулярной к вектору \mathbf{n} и лежащей на расстоянии s от начала координат.

Формула обращения уравнения (2), выведенная Радонем, имеет вид:

$$\mu(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \nabla^2 \int P(\mathbf{n}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{n}, \tag{3}$$

где ∇^2 – лапласиан \mathbf{r} .

Для использования формулы (3), которая часто именуется обратным преобразованием Радона или уравнением визуализации через преобразование Радона, необходимо установить связь между преобразованием Радона (2) и лучевой суммой (1).

Эта связь определена в работе [5]:

если γ – однородное распределение степени 2, т.е. $\gamma(ts) = t^2\gamma(s)$, тогда:

$$\gamma * P(\mathbf{n}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = \int_{S^2} \gamma(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) g(\mathbf{s}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \tag{4}$$

где символ * обозначает свертку по второй величине преобразования Радона.

Предлагаемый нами подход к разработке аналитического алгоритма трехмерной реконструкции, в отличие от классических FBP-алгоритмов, сначала выполняет операцию обратного проецирования и лишь затем – фильтрацию. Алгоритм может быть описан двумя шагами:

1. Определяется обратная проекция $\mu_s(\mathbf{r})$ по прямой проекции $g(\mathbf{s}, \mathbf{u})$, т.е. $g(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \rightarrow \mu_s(\mathbf{r})$, где $\mu_s(\mathbf{r})$ – нефильтрованные значения восстанавливаемого параметра объекта,
2. Осуществляется фильтрация обратной проекции $\mu_s(\mathbf{r})$, т.е. $\mu_s(\mathbf{r}) \rightarrow \mu(\mathbf{r})$.

На втором шаге алгоритма вводится уравнение визуализации, которое позволяет рассматривать задачу реконструкции как задачу восстановления изображения с инвариантной к сдвигу функцией рассеяния точечного источника.

3. Метод трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям для спиральной траектории источника излучения

Общий подход, рассмотренный выше, представим для спиральной траектории источника излучения (рис. 2).

Источник движется вдоль спирали, ось которой лежит на оси Z. При этом плоскость детектора \mathbf{D} всегда остается параллельной ей.

Если принять R – радиус спирали, $d/2\pi$ – ее шаг, то параметрическое уравнение такой спирали имеет вид:

$$\mathbf{s}(\alpha) = (R \cos \alpha, R \sin \alpha, d\alpha)^T, \tag{5}$$

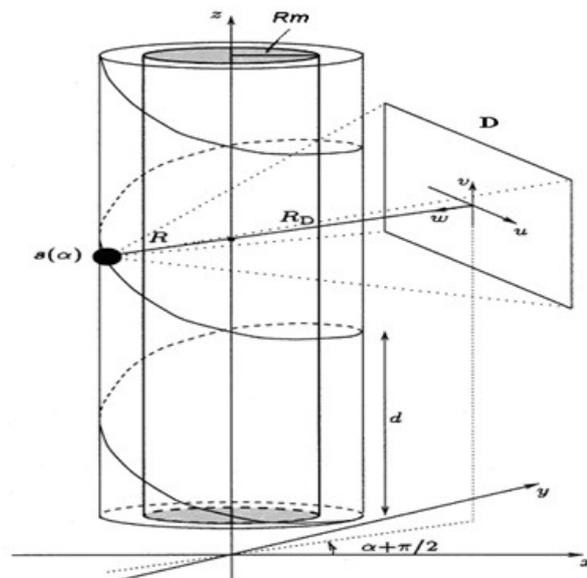


Рис. 2. Геометрия спирального сканирования с конусным пучком излучения: R_m – радиус объекта исследования, R_D – расстояние от центра вращения (расположен на оси Z) до детектора \mathbf{D}

где α – угол поворота источника излучения вокруг оси Z, или в координатах XYZ

$$\mathbf{s}(\alpha) = (x, y, z)^T.$$

Используя уравнение спирали (5), можно переписать основное уравнение (1) в форме преобразования с конусным пучком излучения:

$$g(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \mu(\mathbf{s}(\alpha) + t\mathbf{u}) dt, \alpha \in \Theta, \mathbf{u} \in S^2, \quad (6)$$

на спиральной орбите $\mathbf{s}(\alpha)$, Θ изменяется от 0 до 2π .

Рассмотрим преобразование рентгеновского излучения:

$$\hat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\mathbf{s}(\alpha) + t\mathbf{u}) dt, \quad (7)$$

где интегрирование проводится по всей линии, проходящей через точку $\mathbf{s}(\alpha)$.

Сравнивая уравнения (6) и (7), мы можем написать:

$$\hat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) = g(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) + g(\mathbf{s}(\alpha), -\mathbf{u}). \quad (8)$$

Для определения алгоритма реконструкции изображения используем обозначение дельта-функции, которая позволяет переписать (7) в форме:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t\mathbf{u}) d\mathbf{r} dt = \\ &= \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t\mathbf{u}) dt d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим обратную проекцию через $\tilde{\mu}_s(\mathbf{r})$, которая может быть определена усреднением значений преобразования рентгеновского излучения в точке \mathbf{r} :

$$\tilde{\mu}_s(\mathbf{r}) = \int_{\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} \hat{\mu}(\mathbf{s}(\alpha), \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}) d\alpha. \quad (10)$$

Связь между $\tilde{\mu}_s(\mathbf{r})$ и проекцией $g(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{u})$ может быть определена подстановкой уравнения (8) в (10):

$$\tilde{\mu}_s(\mathbf{r}) = \int_{\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} g(\mathbf{s}(\alpha), \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}) d\alpha, \quad (11)$$

где предполагается, что орбита источника лежит на поверхности, которая полностью покрывает объект исследования.

По формуле (11) возможно получение нефльтрованного изображения низкого каче-

ства. Для получения фильтрованного изображения $\mu(\mathbf{r})$ необходимо к уравнению (11) применить один из методов регуляризации, например, через фильтрующее ядро – ФРТ, используя фильтрующее свойство дельта-функции. Для этого подставим уравнение (9) в уравнение (10):

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_s(\mathbf{r}) &= \int_{\alpha} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}') \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(\alpha) - t \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}) dt d\mathbf{r}' d\alpha = \\ &= \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}') \int_{\Theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(\alpha) - t'(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt' d\alpha d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (12)$$

где мы использовали замену переменных $t' = t / |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|$.

Необходимо заметить, что весовой коэффициент $1 / |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|$ в (12) был исключен заменой переменных.

Интеграл по t' уравнения (12) может быть представлен как

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(\alpha) - t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r} + \mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha) - t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r} - (t-1)(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

что позволяет получить интегральное уравнение визуализации физического параметра

$$\tilde{\mu}(\mathbf{r})_s = \int_{R^3} \mu(\mathbf{r}') h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (14)$$

с ядром

$$h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha))) dt d\alpha. \quad (15)$$

Функцию $h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ можно интерпретировать, как произвольную ФРТ для точки \mathbf{r}_0 системы визуализации с конусным пучком излучения.

Рассмотрим ФРТ (15) в координатах осей XYZ. Перепишем уравнение (15), используя параметрическое уравнение спирали (5) для \mathbf{r}_0 с координатами x_0, y_0, z_0 :

$$\begin{aligned} h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \int_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 + t(x - R \cos \alpha)) \times \\ &\times \delta(y_0 + t(y - R \sin \alpha)) \times \delta(z_0 + t(z - R \alpha)) dt d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Внутренний интеграл выражения (16) можно представить, как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 + t(x - R\cos\alpha))\delta(y_0 + t(y - R\sin\alpha))\delta(z_0 + t(s - d\alpha))dt = \delta((y - R\sin\alpha)x_0 - (x - R\cos\alpha)y_0)\delta(z_0 - \frac{z - d\alpha}{y - R\sin\alpha}y_0). \quad (17)$$

С учетом (17) выражение (16) может быть представлено как:

$$h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}} \times \int_{\theta} \delta(z_0 - \frac{z - d\alpha}{y - R\sin\alpha}y_0) \times \delta(\frac{(y - R\sin\alpha)x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}} - \frac{(x - R\cos\alpha)y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}})d\alpha, \quad (18)$$

где мы имеем умноженный и деленный аргумент второй дельта-функции на $(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$.

В работе [5] показано, что если $R > 1$ (радиус спирали R взят в относительных единицах при радиусе объекта исследования $R_m = 1$), т.е. радиус вращения источника гораздо больше пути сферического множества искомой функции $\mu(\mathbf{r})$, то ФРТ (18) можно заменить на выражение:

$$\tilde{h}_s(\mathbf{r}_0) = \frac{2}{R} \frac{\delta(z_0)}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}, \quad (19)$$

которое описывает приближение к ФРТ.

Используя функцию $\tilde{h}_s(\mathbf{r}_0)$ вместо ФРТ $h_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в (14), мы можем последнюю преобразовать в свертку. Наличие дельта-функции $\delta(z_0) = \delta(z - z_0)$ означает, что 3D-фильтрация редуцируется до 2D-фильтрации поперечных плоскостей. Поэтому к уравнению (14) может быть применено преобразование Фурье, как к уравнению свертки:

$$\bar{\tilde{\mu}}_s(\omega_x, \omega_y, z) = \bar{\mu}(\omega_x, \omega_y, z)\tilde{H}_s(\omega_x, \omega_y), \quad (20)$$

где $\bar{\tilde{\mu}}_s(\omega_x, \omega_y, z)$, $\bar{\mu}(\omega_x, \omega_y, z)$ – преобразование Фурье с пространственными частотами ω_x и ω_y , соответственно, $\mu_s(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$, $\tilde{H}_s(\omega_x, \omega_y)$ – преобразование функции Фурье (19):

$$\tilde{H}_s(\omega_x, \omega_y) = \frac{2}{R} \frac{2\pi}{(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}}. \quad (21)$$

Весовой коэффициент в (12), если имеем неравенство $R > 1$, будет равен:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} = \frac{1}{(R^2 + (z - d\alpha)^2)^{1/2}}. \quad (22)$$

Влияние коэффициента $2/R$ может быть убрано из выражения (21) и вставлено в весовой коэффициент (22), тогда:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|} = \frac{R}{2(R^2 + (z - d\alpha)^2)^{1/2}}. \quad (23)$$

4. Алгоритм трехмерной реконструкции томографических изображений по конусным проекциям

Учитывая выше представленные выкладки, алгоритм трехмерной реконструкции изображения для конусного пучка рентгеновского излучения может быть представлен следующими шагами:

1. Определение взвешенной обратной проекции $\tilde{\mu}_s(\mathbf{r})$ по прямым проекциям $g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))$, используя выражения (11) и (23):

$$\tilde{\mu}_s(\mathbf{r}) = \frac{R}{2} \int_{\alpha} \frac{1}{(R^2 + (z - d\alpha)^2)^{1/2}} g(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\alpha)|}, \alpha) d\alpha. \quad (24)$$

2. Фильтрация взвешенной обратной проекции $\tilde{\mu}_s(\mathbf{r})$ (24):

- 2.1. Определение прямого преобразования Фурье взвешенной обратной проекции:

$$\bar{\tilde{\mu}}_s(\omega_x, \omega_y, z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mu}_s \exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy. \quad (25)$$

- 2.2. Определение прямого преобразования Фурье искомой обратной проекции из выражения (20):

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\omega_x, \omega_y, z) &= \bar{\tilde{\mu}}_s(\omega_x, \omega_y, z) \frac{1}{\tilde{H}_s(\omega_x, \omega_y)} = \\ &= \bar{\tilde{\mu}}_s(\omega_x, \omega_y, z) \frac{R(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}}{2} = \\ &= \bar{\tilde{\mu}}_s(\omega_x, \omega_y, z) I_s(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}) W(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}), \end{aligned} \quad (26)$$

где обратный фильтр $\frac{1}{\tilde{H}_s(\omega_x, \omega_y)}$ ФРТ представлен в виде произведения собственно обратного фильтра $I_s(\rho) = \rho / (2\pi)$, где $\rho^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$, и "окна" фильтрации $W(\rho)$, ограничивающего для повы-

пения устойчивости алгоритма реконструкции высокие частоты объекта [23].

Для примера мы можем использовать “окно” Хемминга:

$$W(\rho) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos(\pi\rho / \omega_{cp}), & \text{при } \rho \leq \omega_{cp} \\ 0, & \text{при } \rho \geq \omega_{cp} \end{cases}, \quad (27)$$

где ω_{cp} – частота среза.

2.3. Определение искомой обратной проекции через обратное преобразование Фурье выражения (26):

$$\mu(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mu}(\omega_x, \omega_y, z) \exp(i(\omega_x x + \omega_y y)) d\omega_x d\omega_y, \quad (28)$$

5. Результаты математического моделирования алгоритма трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям

Для моделирования алгоритма трехмерной реконструкции изображений по конусным проекциям была разработана математическая модель фантома, физический образ которого представлен на рис. 3.

Размер матрицы изображения задавался 512×512 пикселей, размер куба значений $\mu(x, y, z)$ – $512 \times 512 \times 512$ вокселей, количество единичных детекторов (отсчетов) в матрице детекторов – $N \times N = 512 \times 512$, количество ракур-

сов облучения объекта исследования – $M = 300$, шаг спирали $d = 10$ мм, количество шагов спирали $L = 4$.

Для заданного фантома были смоделированы проекционные данные (прямые проекции) для рентгеновских лучей:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha)) = -\ln \left(\frac{I(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))}{I_0} \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbf{s}(\alpha)} d\mathbf{s} \right)_{\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha)}, \quad (29)$$

где логарифм определен согласно закону Бугера–Ламберта–Бера при поглощении монохроматического рентгеновского луча в объекте исследования:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha)) = I_0 \exp \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathbf{s}(\alpha)} d\mathbf{s} \right)_{\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha)}, \quad (30)$$

где I_0 – интенсивность входящего луча рентгеновского излучения в объект исследования; $d\mathbf{s}$ – элементарное расстояние, которое проходит луч через вещество по прямой, соединяющей источник \mathbf{s} и точку объекта исследования \mathbf{r} ; $\mu_{\mathbf{s}(\alpha)}$ – линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения на элементарном расстоянии $d\mathbf{s}$ при ракурсе облучения объекта α .

Интеграл (29) есть лучевая сумма для общего ее выражения по (1).

В результате моделирования проекционных данных были получены:

- ✓ трехмерная матрица проекционных данных размером $N \times N \times M$ для одного шага спирали,
- ✓ четырехмерная матрица проекционных данных размером $N \times N \times M \times L$ для L шагов спирали.

Моделирование трехмерного алгоритма осуществлялось в среде Matlab, которая эффективно осуществляет матричные вычисление интегралов, дифференциалов, прямого и обратного одномерного и двухмерного преобразования Фурье, одномерной и двухмерной свертки, одномерного и двухмерного преобразования Радона с задаваемыми одномерными, двухмерными и трехмерными матрицами переменных.

По проекционным данным $g(\mathbf{r}, \mathbf{s}(\alpha))$ в соответствии с вычислительным алгоритмом (раздел 4) проводилась реконструкция значений $\mu(\mathbf{r})$ модели фантома.

На рис. 4 представлены томограммы модели фантома для четырех шагов спирали ($L = 4$) при соотношении $R/R_m = 6$. На каждом шаге спирали фантом поворачивался вокруг оси на 90° .

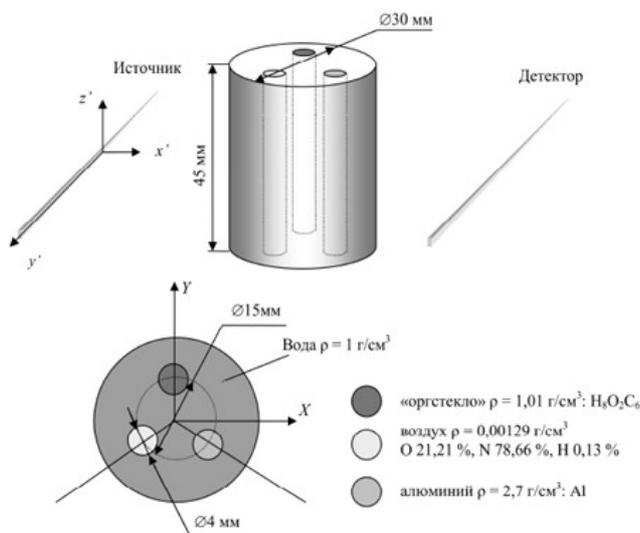


Рис. 3. Физический образ фантома



Рис. 4. Томограммы модели фантома, полученные при реконструкции по трехмерному алгоритму

Качество изображения томограмм достаточно высокое, что показывает хорошую устойчивость разработанного трехмерного алгоритма.

Ошибка моделирования сечений фантома (мера различия идеального фантома и его модели) определялась по формуле, как среднеквадратическая погрешность:

$$d_1 = \left(\frac{\sum_i^k (t_i - h_i)^2}{\sum_i^\mu t_i^2} \right)^{1/2}, \tag{14}$$

где t_i и h_i – значения серо-белого линейного коэффициента ослабления рентгеновского излучения μ i -го значения профиля идеального фантома и его модели, соответственно; k – количество значений профиля.

Мера различия – $d_1=0,026$ или 2,6 %.

Было проведено исследование влияния расстояния источника излучения от центра координат по отношению к радиусу объекта исследования для значений R/R_m , равных 1,5; 3,0; 6,0; 12,0. Для этого была разработана математическая модель фантома в форме куба 40×40 мм, состоящего из отдельных однородных эллиптических пластин (эллипсоидов) одинаковой плотности. Фантом наиболее чувствителен к искажениям трехмерной реконструкции (рис. 5).

На рис. 6 представлены томограммы фантома, реконструируемые по трехмерному алгоритму (раздел 4), для значений R/R_m , равных 12,0; 6,0; 3,0; 1,5. Количество шагов спирали $L=4$.

Погрешность реконструкции (мера различия изображения сечения модели фантома и реконструированного изображения) определялась по формуле, как среднеквадратическое отклонение [19]:

$$d = \left(\frac{\sum_i^\xi \sum_j^\xi (t_{i,j} - h_{i,j})^2}{\sum_i^\xi \sum_j^\xi (t_{i,j})^2} \right)^{1/2}, \tag{15}$$

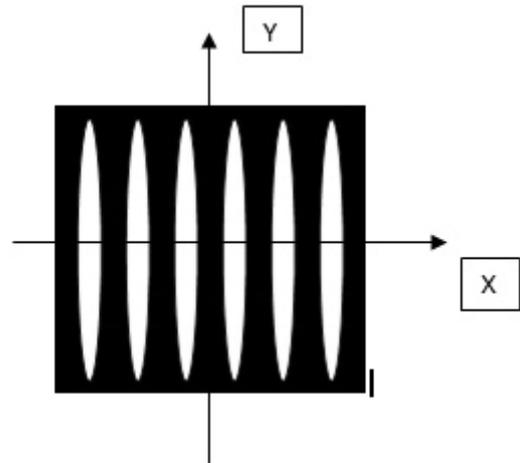


Рис. 5. Сечение математической модели фантома по плоскости $z=0$

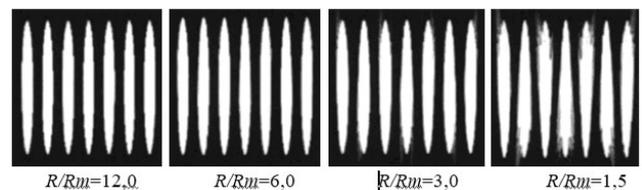


Рис. 6. Реконструируемые изображения пластинчатого фантома

где t_{ij} и h_{ij} – значения серо-белого коэффициента ослабления рентгеновского излучения μ i -го пиксела в j -й строке матрицы изображений модели и реконструкции, соответственно; матрицы изображений имеют размер $\xi \times \xi$.

Мера различия d для различных значений R/R_m представлена в табл. 1.

Профили одного из сечений модели фантома и реконструированного изображения модели показаны на рис. 7. По оси Y отложены значения относительной плотности, по оси X – относительные размеры фантома.

Реконструированные изображения пластинчатого фантома показывают, что разработанный трехмерный алгоритм для спирального сканирования объекта исследования дает хорошие результаты уже для значений R/R_m , равных около 3,0, т.е. при достаточно больших углах конуса излучения источника. Для значений R/R_m менее 3,0 появляются артефакты на изображении, что наблюдается на томограмме пластинчатого фантома при $R/R_m=1,5$.

Была проведена сравнительная оценка точности по (15) разработанного алгоритма трехмерной реконструкции для спиральной

Таблица 1

Мера различия d для различных значений R/R_m

Мера различия d	$R/R_m=12,0$	$R/R_m=6,0$	$R/R_m=3,0$	$R/R_m=1,5$
		1,9 %	2,7 %	4,7 %

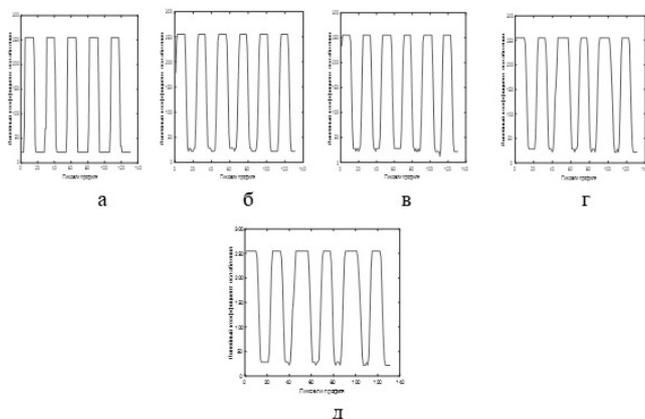


Рис. 7. Профили сечения модели фантома (а), реконструированных изображений сечения: $R/R_m=12,0$ (б), $R/R_m=6,0$ (в), $R/R_m=3,0$ (г), $R/R_m=1,5$ (д)

траектории источника излучения и алгоритмов трехмерной реконструкции для круговой траектории, отраженных в работах [1, 2, 11, 24] и статьях [18, 20–23] соответственно.

В табл. 2 даны погрешности трехмерной реконструкции разработанного алгоритма, известного алгоритма Фельдкампа и Кацевича и более поздних его модификаций для значений $R/R_m=3,0$.

6. Заключение

Прямое решение задачи трехмерной реконструкции через обратное трехмерное преобразование Радона не представляется воз-

можным. Уравнение визуализации заданного физического параметра в этом случае является сложным, не регуляризованным и неприемлемым для практического использования. В данной работе разработан новый метод трехмерной реконструкции томографического изображения в конусном пучке рентгеновского излучения с матричным детектором для спирального сканирования протяженного объекта исследования. Этот метод основан на трехмерном преобразовании Радона, является точным и в нем не используются приближения в геометрии лучевых сумм.

Основная идея предложенного метода заключается в использовании в уравнении визуализации произвольной ФРТ, инвариантной к сдвигу, и сведение уравнения к определению свертки проекций с произвольной ФРТ. Для вывода уравнения визуализации через свертку было использовано допущение, что источник излучения находится относительно далеко от объекта исследования. В этом случае ФРТ может быть преобразована до ядра свертки. Использование специально выбранного весового коэффициента в обратной проекции даёт нам возможность упростить выражение ФРТ и фильтра реконструкции. Формула для фильтрации обратной проекции дана в области Фурье в форме 2D поперечного линейно-возрастающего фильтра.

Математическое моделирование разработанного алгоритма трехмерной реконструкции для спиральной траектории источника излучения для модели фантома, имитирующего объ-

Таблица 2

Погрешности трехмерной реконструкции

Алгоритм реконструкции		Алгоритм, разработанный авторами работы	Алгоритм Фельдкампа и Кацевича	Поздние модификации алгоритмов Фельдкампа и Кацевича
Погрешность реконструкции	Круговая траектория источника		17,8 %	15,6 %
	Спиральная траектория источника	4,7 %		

ект исследования с контрастными вставками, дало удовлетворительные результаты. Сравнительная оценка точности разработанного алгоритма трехмерной реконструкции для спиральной траектории источника излучения и алгоритмов трехмерной реконструкции для круговой траектории показала наилучшие результаты для разработанного алгоритма.

Для исследования влияния расстояния источника излучения от центра координат по отношению к радиусу объекта исследования была разработана математическая модель специального фантома в форме куба, состоящего из отдельных равномерных эллиптических пластин (эллипсоидов) одинаковой плотности. Исследования показали, что для соотношения радиуса спиральной траектории к радиусу объекта (R/R_m), равному около 3,0, т.е. при достаточно больших углах конуса излучения источника, томографическое изображение получается с высоким качеством, что может быть использовано в практической медицинской рентгеновской томографии.

Список литературы

1. Feldkamp LA, Davis LC, Kress JW. Practical cone-beam algorithm. *J Opt Soc Am A*. 1984; 1: 612-21.
2. Kachelrie M. Extended parallel backprojection for standard three-dimensional and phase-correlated four-dimensional axial and spiral cone-beam CT with arbitrary pitch, arbitrary cone-angle, and 100% dose usage. *Med Phys*. 2004; 31(6): 1623-41.
3. Kachelrie M. Advanced single-slice rebinning in cone-beam spiral CT. *Med Phys*. 2001; 27(4): 1033-41.
4. Katsevich A. A general scheme for constructing inversion algorithms for cone beam CT. *Int J Mathematics and Math Sci*. 2003; (21): 1305-21.
5. Bronnikov AV. Cone-beam reconstruction by backprojection and filtering. *J Opt Soc Am A*. 2000; 17(1): 1993-2000.
6. Календер В. Компьютерная томография основы, техника, качество изображений и области клинического использования. Пер. с англ. М.: Техносфера, 2006. 344 с.
7. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 286 с.
8. Симонов ЕН, Аврамов МВ. К вопросу разработки методов реконструкции изображений в рентгеновской компьютерной томографии с конусным пучком излучения. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2015; 15(4): 58-66. [Simonov EN, Avramov MV. On the issue of developing methods for reconstructing images in X-ray computed tomography with a cone beam of radiation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technology, control, radio electronics*. 2015; 15(4): 58-66. (In Russian)].
9. Симонов ЕН, Аврамов МВ, Аврамов ДВ. Анализ трехмерных алгоритмов реконструкции в рентгеновской компьютерной томографии. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2017; 17(2): 24-32. [Simonov EN, Avramov MV, Avramov DV. Analysis of three-dimensional reconstruction algorithms in X-ray computed tomography. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technology, control, radio electronics*. 2017; 17(2): 24-32. (In Russian)].
10. Smith BD. Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review. *Opt Eng*. 1991; 29: 524-34.
11. Симонов ЕН, Аврамов ДВ. К вопросу получения объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2015; 15(4): 50-7. [Simonov EN, Avramov DV. On the issue of obtaining three-dimensional images in X-ray computed tomography. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technology, control, radio electronics*. 2015; 15(4): 50-7. (In Russian)].
12. Симонов ЕН, Аврамов МВ, Аврамов ДВ. Метод объемного рендеринга для визуализации трехмерных данных в рентгеновской компьютерной томографии. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2016; 16(4): 5-12. [Simonov EN, Avramov MV, Avramov DV. A volumetric rendering method for visualizing three-dimensional data in X-ray computed tomography. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technologies,*

- control, radio electronics. 2016; 16(4): 5-12. (In Russian)].
13. Симонов Е., Аврамов М. Обзор методов реконструкции изображений в рентгеновской компьютерной томографии с конусно-лучевой геометрией. Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Вычислительная техника, управление и радиоэлектроника. 2018; 18(2): 29-37. [Simonov E, Avramov M. Review of image reconstruction methods in X-ray computed tomography with cone-beam geometry. Bulletin of the South Ural University. Series: Computer Technology, Control and Radio Electronics. 2018; 18(2): 29-37. (In Russian)].
 14. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 352 с.
 15. Yang YF, Zhang DH. Three-dimensional weighting reconstruction algorithm for circular cone-beam CT under large scan angles. Nucl Sci Techn. 2017; 28: Article number: 116.
 16. Paleo P, Desvignesc M, Mironea A. A practical local tomography reconstruction algorithm based on a known sub-region. J Synchrotron Radiat. 2017; 24 (1): 257-68.
 17. Kevin GF., Benjamin PE., Stuart AM. High-Efficiency Three-Dimensional Visualization of Complex Microstructures via Multidimensional STEM Acquisition and Reconstruction, Microscopy and Microanalysis. 2020; 26(2): 240-6. DOI: org/10.1017/S1431927620000173.
 18. Fu J, Hu X, Velroyen A. 3D algebraic iterative reconstruction for cone-beam x-ray differential phase-contrast computed tomography. 2015. DOI: 10.1371/journal.pone.0117502.
 19. Трофимов ОЕ, Лихачев АВ. Сравнение некоторых алгоритмов томографической реконструкции в конусе лучей. Сибирский журнал индустриальной математики. 2008; 9(3): 35-52. [Trofimov OE, Likhachev AV. Comparison of some algorithms of tomographic reconstruction in the cone of rays. Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2008; 9(3): 35-52. (In Russian)].
 20. Willeminck MJ, Nolл PB. The evolution of image reconstruction for CT-from filtered back projection to artificial intelligence. Eur Radiol. 2019; 29(5): 2185-95. DOI: 10.1007/s00330-018-5810-7.
 21. Симонов ЕН. Физика визуализации изображений в рентгеновской компьютерной томографии. Челябинск.: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. 479 с. [Simonov EN. Physics of image visualization in X-ray computed tomography. Chelyabinsk.: SUSU Publishing Center, 2014. 479 p. (In Russian)].
 22. Kirillov A. On a problem of I. M. Gel'fand. Sov Math Dokl. 1961; 2: 268-9.
 23. Tuy H. K. An inversion formula for cone-beam reconstruction. SIAM J Appl Math. 1983; 43: 546-52.
 24. Хелгасон С. Преобразование Радона. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 324 с.

ALGORITHM FOR RECONSTRUCTION OF THREE-DIMENSIONAL IMAGES IN X-RAY COMPUTED TOMOGRAPHY WITH A CONE BEAM OF RADIATION*E.N. Simonov, K.M. Vinogradov**South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*

Purpose: Development of an algorithm for the reconstruction of three-dimensional images in X-ray computed tomography with a cone beam.

Material and methods: A new approach to the development of the reconstruction algorithm is proposed. The algorithm is based on the exact analytical representation of the 3D Radon transform of the projection data. For such a representation, an iteration-invariant point spread function (PSF) is introduced.

From the existing approximate algorithms of Feldkamp, Katsevich and other authors, the developed algorithm differs in increased accuracy, is applicable for high-performance spiral X-ray tomography, and provides a practical design of the X-ray optical path of the tomograph.

Results: Mathematical modeling of the developed three-dimensional reconstruction algorithm for the helical trajectory of the radiation source was performed; satisfactory results were obtained on a phantom model simulating an object of study with contrast inserts. The influence of the distance of the radiation source from the center of coordinates with respect to the radius of the object of study is shown, for which a mathematical model of a special phantom in the form of a cube, consisting of separate uniform elliptical plates (ellipsoids) of the same density, was developed.

The quality of the reconstructed tomographic images was assessed through by measurement of the difference between the image of the section of the phantom model and the reconstructed image, presented as the root mean square error.

Conclusion: Studies have shown that for the ratio of the radius of the spiral trajectory to the radius of the object (R/R_m), equal to about 3.0, i.e. at sufficiently large angles of the radiation cone of the source, the developed algorithm for three-dimensional reconstruction with a cone beam of radiation gives a tomographic image of high quality. This can be applied in the development of medical X-ray computed tomography.

Key words: *X-ray computed tomography, cone radiation beam, two-dimensional and three-dimensional Radon transformation, three-dimensional image reconstruction algorithms*

E-mail: e.n.simonov@yandex.ru