

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ РАДИАЛЬНОЙ ДОЗОВОЙ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В БРАХИТЕРАПИИ, ПОЛИНОМАМИ 3–5 СТЕПЕНИ

А.В. Белоусов, А.А. Белянов, А.П. Черняев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

Обеспечение гарантий качества брахитерапии подразумевает высокую точность определения поглощённой дозы, а, следовательно, высокую точность аппроксимации радиальной дозовой функции (РДФ) при расчетах системами дозиметрического планирования. Цель работы заключается в исследовании качества аппроксимации радиальной дозовой функции полиномом 3–5 степени. Статистическая обработка проведена нелинейным методом наименьших квадратов. При необходимой относительной погрешности аппроксимации РДФ не хуже чем $\pm 25\%$ на расстоянии 10 см и более от источника оптимальным выбором для аппроксимации РДФ представляются полиномы 3 степени.

Ключевые слова: *брахитерапия, радиальная дозовая функция, полиномиальная аппроксимация*

Введение

Определение дозиметрических характеристик применяемых в брахитерапии источников перед началом их клинического использования является требованием протокола рабочей группы № 43 Американской ассоциации медицинских физиков [1]. Список параметров приведён там же, а в его более новой версии – в [2]. Эти параметры важны для составления плана лечения с помощью компьютерных систем планирования облучения (СП), где одной из ключевых характеристик источника является его радиальная дозовая функция (РДФ) – $g(r)$. Детальное описание методики определения $g(r)$ приведено в [1].

РДФ должна аппроксимироваться полиномами 5-го порядка. Точность определения коэффициентов полинома должна быть достаточной для того, чтобы погрешность аппроксимации была не хуже 2 %. Протокол призывает публиковать все данные проведённых исследований, однако на практике обычно ограничиваются табличными значениями в отдельных точках. Данные по аппроксимации,

если и приводятся, то только для избранных значений расстояния от источника. Настоящая работа преследует цель проверки качества аппроксимации РДФ для закрытых источников гамма-излучения [3–10] полиномами 3–5 степени. Выбраны источники на основе радионуклидов ^{60}Co , ^{137}Cs и ^{192}Ir : BEBIG-Co0.A86, BEBIG-GK60M21, 3M_6500_6D6C, Amersham_CDSCS-J, BEBIG-GI192M11, Nucletron mHDR-v2, Varian(classic), BEBIG-Ir2.A85-2.

Материал и методы

Выбор полиномов в качестве аппроксимирующих функций не идеален. Несмотря на их простоту и некоторое обоснование выбора разложением в ряд Тейлора полиномиальные функции не отражают физические особенности процессов взаимодействия фотонов с веществом. Полиномиальная аппроксимация предъявляет высокие требования к гладкости, плохо подходит для зашумленных или быстро меняющихся функций. При использовании полиномов высоких степеней возможно накопле-

ние ошибок, также будут неудовлетворительными результаты при аппроксимации неравномерно распределенных данных. Вместе с тем, полиномы позволяют достигать высокой точности аппроксимации экспериментальных точек. Эти соображения приводят к выводу, что целесообразнее использовать полиномы возможно меньших степеней.

В качестве исходных данных приняты результаты расчетов РДФ, выполненных различными авторами [3–10]. Эти данные аппроксимированы полиномами 3–5 степеней (РЗ–Р5). Во всех случаях аппроксимация выполнена нелинейным методом наименьших квадратов при помощи пакета программ Gnuplot. Рассчитаны аппроксимированные значения функции $g_{fit}(r)$, относительная погрешность аппроксимации в заданной точке:

$$R_i = \left| \frac{g_{fit}(r_i) - g_{calc}(r_i)}{g_{calc}(r_i)} \right|, \quad (1)$$

среднее значение относительной погрешность аппроксимации по всем точкам:

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} R_i, \quad (2)$$

среднеквадратичная относительная погрешность:

$$\langle R \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} R_i^2}. \quad (3)$$

Эти параметры характеризуют точность аппроксимации заданной функции в экспериментально определенных точках. Также рассчитан возможный коридор погрешностей аппроксимационной функции. Если функция представлена в виде:

$$g_{fit}(r) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=N} a_i r^i \equiv P_N,$$

то в результате наличия неопределенности в вычислении параметров $a_i - \Delta a_i \leq a_i \leq a_i + \Delta a_i$, нижняя оценка неопределенности самой функции составляет:

$$\Delta g_{fit}(r) = \sqrt{\sum_{i=0} (\Delta a_i r^i)^2}. \quad (4)$$

Неопределенности в значениях отдельных аппроксимационных коэффициентов (стандартные ошибки коэффициентов регрессии) для каждого источника определялись методом максимального правдоподобия.

Формула (4) применима в случае, когда неопределенности значений отдельных коэффициентов (смешанный второй момент) независимы, т.е. соответствует оценке снизу. В случае наличия подобной зависимости из неравенства Шварца следует, что верхний предел погрешности может быть найден согласно:

$$\Delta g_{fit}(r) \Big|_{\max} = \sum_{i=0} \Delta a_i r^i. \quad (5)$$

Таким образом, истинные значения могут лежать в коридоре: $g_{fit}(r) \pm \Delta g_{fit}(r)$.

Рассчитаны значения $\Delta g_{fit}(r)$ и $\Delta g_{fit}(r)/g_{fit}(r)$, последняя величина более наглядно представляет возможные неопределенности аппроксимации.

Результаты

В табл. 1 приведены параметры, характеризующие качество аппроксимации РДФ различных источников полиномами 3–5 степени (сверху вниз в соответствующей ячейке). Как видно из табл. 1, для всех источников (кроме ВЕВІG-Со0.А86) качество аппроксимации удовлетворяет требованиям TG-43 для полиномов всех рассматриваемых степеней. Для источника ВЕВІG-Со0.А86 отклонение функции аппроксимации от расчетных значений незначительно превышает значения, рекомендованные TG-43 (2,05 % против рекомендованных 2 %). Сравнение по всем критериям (1–3) показывает, что качество аппроксимации сравнимо для всех исследуемых полиномов. На рис. 1 представлены значения относительной погрешности аппроксимации в экспериментальных точках для полиномов 3–5, рассчитанные для источника ВЕВІG-Со0.А86.

На рис. 2 представлены типичные зависимости относительной неопределенности результатов аппроксимации РДФ полиномами 3–5 степени, рассчитанной по формулам (4) и (5). Увеличение степени полинома приводит к резкому увеличению возможной неопределенности аппроксимационной функции. Так, если на расстояниях до 5 мм в зависимости от степени полинома степень неопределенности колеблется в пределах 2–20 %, то уже на расстояниях порядка 10 мм – от 8 до 100 %. Таким образом, оптимальным выбором для аппроксимации радиальной дозовой функции являются полиномы третьей степени. Подчеркнем, что возможная неопределенность вызвана погрешностью опре-

Таблица 1

Параметры аппроксимации РФД для различных источников, %

	⁶⁰ Co-HDR-BEBIG-Co0.A86	⁶⁰ Co-HDR-BEBIG-GK60M21	¹³⁷ Cs-3M_6500_6D6C	¹³⁷ Cs-Amersham_CDCCS-J	¹⁹² Ir-HDR_Bebig-G1192M11	¹⁹² Ir-HDR_Nucletron mHDR-v2	¹⁹² Ir-HDR_Varian(classic)	¹⁹² Ir-HDR-Bebig-Ir2.A85-2
R_{max}	2,05E-02	1,97E-02	2,42E-03	2,72E-03	2,41E-03	4,33E-03	1,97E-02	2,47E-03
	1,94E-02	1,86E-02	2,23E-03	1,50E-03	2,68E-03	4,81E-03	1,51E-02	2,69E-03
	1,92E-02	1,83E-02	2,13E-03	1,00E-03	2,35E-03	3,02E-03	1,20E-02	2,26E-03
\bar{R}	4,18E-03	3,99E-03	6,76E-04	1,01E-03	7,12E-04	1,98E-03	5,19E-03	6,58E-04
	3,58E-03	3,39E-03	6,45E-04	6,74E-04	5,76E-04	1,78E-03	4,01E-03	5,72E-04
	3,37E-03	3,03E-03	5,94E-04	4,01E-04	5,97E-04	1,02E-03	3,56E-03	5,83E-04
$\langle R \rangle$	6,59E-03	6,25E-03	9,22E-04	1,18E-03	9,09E-04	2,41E-03	6,92E-03	8,95E-04
	6,39E-03	6,03E-03	8,87E-04	7,78E-04	8,73E-04	2,27E-03	5,37E-03	8,71E-04
	6,37E-03	6,00E-03	8,65E-04	4,93E-04	8,37E-04	1,27E-03	4,53E-03	8,12E-04

деления аппроксимационных коэффициентов, вычисленных нелинейным методом наименьших квадратов, и характеризует, в первую очередь, возможные ошибки вне интервала экспериментальных данных. Значения аппроксимационных коэффициентов и их неопределенности представлены в табл. 2.

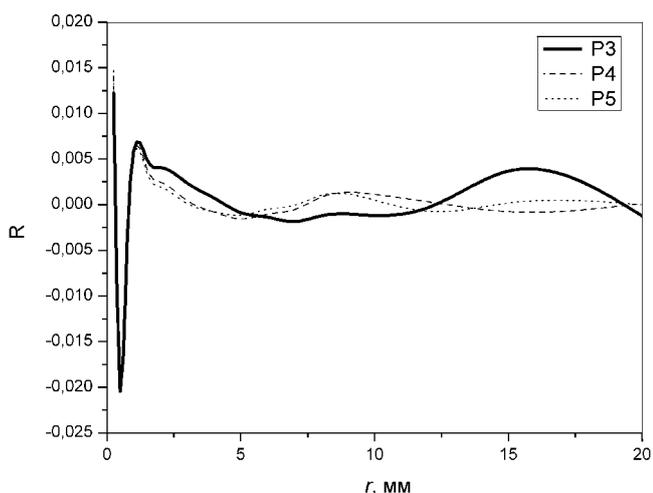


Рис. 1. Относительная ошибка аппроксимации радиальной дозовой функции полиномами 3–5 степени для источника BEBIG-Co0.A86

Выводы

В работе исследована зависимость качества аппроксимации радиальной дозовой функции закрытых источников для брахитера-

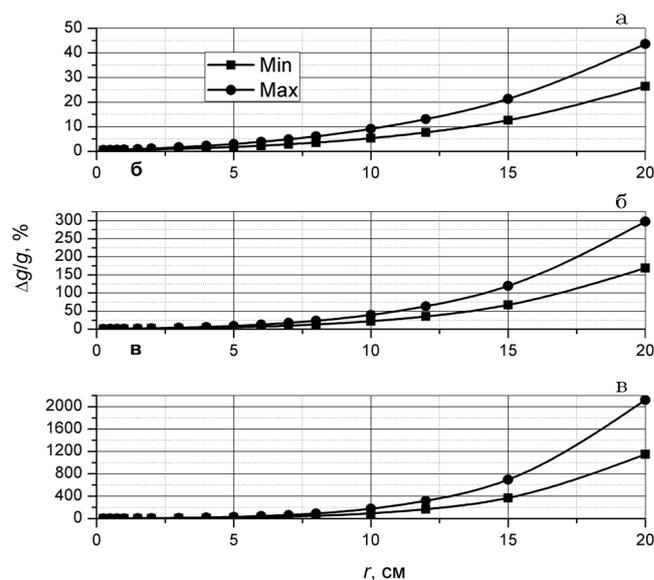


Рис. 2. Максимальное и минимальное значение относительной неопределенности аппроксимирующих полиномов для источника BEBIGCo0.A86 [3]: а – полином 3 степени; б – полином 4 степени; в – полином 5 степени

Таблица 2

**Значения аппроксимационных коэффициентов и их неопределенностей
для полиномов 3–5 степеней**

	Коэф.	3		4		5	
		Знач.	Неопр.	Знач.	Неопр.	Знач.	Неопр.
⁶⁰ Co-HDR-BEBIG-Co0.A86	A0	1,02E+00	4,56E-03	1,03E+00	5,90E-03	1,03E+00	7,81E-03
	A1	-1,81E-02	2,62E-03	-2,19E-02	5,70E-03	-2,39E-02	1,09E-02
	A2	9,73E-05	3,46E-04	1,08E-03	1,35E-03	1,88E-03	3,96E-03
	A3	-4,57E-06	1,18E-05	-8,64E-05	1,09E-04	-2,07E-04	5,67E-04
	A4	-	-	2,11E-06	2,79E-06	9,47E-06	3,41E-05
	A5	-	-	-	-	-1,56E-07	7,20E-07
⁶⁰ Co-HDR-BEBIG-GK60M21	A0	1,02E+00	4,32E-03	1,03E+00	5,57E-03	1,03E+00	7,36E-03
	A1	-1,80E-02	2,48E-03	-2,20E-02	5,37E-03	-2,44E-02	1,02E-02
	A2	8,02E-05	3,28E-04	1,10E-03	1,27E-03	2,09E-03	3,73E-03
	A3	-3,76E-06	1,12E-05	-8,89E-05	1,03E-04	-2,38E-04	5,33E-04
	A4	-	-	2,19E-06	2,63E-06	1,13E-05	3,21E-05
	A5	-	-	-	-	-1,93E-07	6,78E-07
¹³⁷ Cs-3M_6500_6D6C	A0	1,01E+00	6,15E-04	1,01E+00	7,82E-04	1,00E+00	9,91E-04
	A1	-4,22E-03	3,52E-04	-3,61E-03	7,25E-04	-2,85E-03	1,32E-03
	A2	-1,06E-03	4,63E-05	-1,22E-03	1,71E-04	-1,54E-03	4,89E-04
	A3	2,02E-05	1,58E-06	3,35E-05	1,39E-05	8,18E-05	7,08E-05
	A4	-	-	-3,44E-07	3,58E-07	-3,33E-06	4,30E-06
	A5	-	-	-	-	6,36E-08	9,13E-08
¹³⁷ Cs-Amersham_CDSCS-J	A0	1,00E+00	1,51E-03	9,98E-01	1,50E-03	9,95E-01	1,42E-03
	A1	-2,57E-03	1,26E-03	3,70E-03	1,94E-03	1,18E-02	2,56E-03
	A2	-1,44E-03	2,85E-04	-4,04E-03	7,44E-04	-9,09E-03	1,46E-03
	A3	2,98E-05	1,83E-05	4,15E-04	1,07E-04	1,68E-03	3,51E-04
	A4	-	-	-1,85E-05	5,10E-06	-1,55E-04	3,72E-05
	A5	-	-	-	-	5,27E-06	1,43E-06
¹⁹² Ir-HDR_Bebig-GI192M11	A0	9,90E-01	6,08E-04	9,90E-01	7,83E-04	9,90E-01	9,96E-04
	A1	1,09E-02	3,49E-04	1,04E-02	7,56E-04	1,14E-02	1,38E-03
	A2	-1,98E-03	4,61E-05	-1,84E-03	1,79E-04	-2,28E-03	5,05E-04
	A3	3,39E-05	1,57E-06	2,19E-05	1,45E-05	8,83E-05	7,22E-05
	A4	-	-	3,09E-07	3,70E-07	-3,76E-06	4,35E-06
	A5	-	-	-	-	8,62E-08	9,18E-08
¹⁹² Ir-HDR_Nucletron mHDR-v2	A0	9,99E-01	1,30E-03	9,98E-01	1,51E-03	1,00E+00	1,04E-03
	A1	6,29E-03	1,05E-03	7,74E-03	1,96E-03	-8,85E-04	2,04E-03
	A2	-1,15E-03	1,90E-04	-1,68E-03	6,35E-04	3,30E-03	1,03E-03
	A3	-6,48E-05	9,19E-06	-2,45E-06	7,16E-05	-1,01E-03	1,99E-04
	A4	-	-	-2,27E-06	2,59E-06	8,10E-05	1,61E-05
	A5	-	-	-	-	-2,40E-06	4,62E-07
¹⁹² Ir-HDR_Varian(classic)	A0	9,68E-01	3,93E-03	9,63E-01	3,68E-03	9,59E-01	3,62E-03
	A1	2,37E-02	3,16E-03	3,58E-02	4,76E-03	5,01E-02	7,09E-03
	A2	-3,62E-03	5,73E-04	-8,09E-03	1,55E-03	-1,63E-02	3,59E-03
	A3	4,18E-05	2,77E-05	5,66E-04	1,75E-04	2,24E-03	6,92E-04
	A4	-	-	-1,91E-05	6,31E-06	-1,57E-04	5,60E-05
	A5	-	-	-	-	3,97E-06	1,61E-06
¹⁹² Ir-HDR-Bebig-Ir2.A85-2	A0	9,90E-01	5,98E-04	9,90E-01	7,80E-04	9,89E-01	9,64E-04
	A1	1,09E-02	3,44E-04	1,05E-02	7,53E-04	1,19E-02	1,34E-03
	A2	-1,98E-03	4,54E-05	-1,87E-03	1,78E-04	-2,44E-03	4,89E-04
	A3	3,39E-05	1,55E-06	2,47E-05	1,44E-05	1,09E-04	6,99E-05
	A4	-	-	2,38E-07	3,69E-07	-4,95E-06	4,21E-06
	A5	-	-	-	-	1,10E-07	8,89E-08

пии полиномами 3–5 степени. Оптимальным выбором для аппроксимации радиальной дозовой функции представляются полиномы 3 степени, по крайней мере, в том случае, если необходимо достичь точности аппроксимирующей функции не хуже $\pm 25\%$ на расстоянии 10 см. В публикациях требуется приводить не только параметры аппроксимации, но и погрешности их определения, с указанием всего набора сведений, однозначно определяющих способ и условия вычисления параметров. При вычислении поглощенной дозы на системах планирования с предустановленными аппроксимирующими функциями в виде полиномов пятой степени, необходимо иметь в виду, что на расстояниях более 10 см от источника неопределенность вычисления поглощенной дозы может достигать 10^2 – $10^5\%$.

Список литературы

1. Nath R., Anderson L.L., Luxton G. et al. Dosimetry of interstitial brachytherapy sources: Recommendations of the AAPM Radiation Therapy Committee Task Group №43 // *Med. Phys.* 1995. Vol. 22. Issue 2. P. 209–234.
2. Rivard M.J., Coursey B.M., DeWerd L.A. et al. Update of AAPM Task Group №43 Report: A revised AAPM protocol for brachytherapy dose calculations // *Med. Phys.* 2004. Vol. 31. Issue 3. P. 633–674.
3. Ballester F., Granero D., Perez-Calatayud J. et al. Monte Carlo dosimetric study of the BEBIG Co-60 HDR source // *Phys. Med. Biol.* 2005. Vol. 50. P. 309–316.
4. Perez-Calatayud J., Granero D., Ballester F. et al. Technical note: Monte Carlo derivation of TG-43 dosimetric parameters for radiation therapy resources and 3M Cs-137 sources // *Med. Phys.* 2005. Vol. 32. P. 2464–2470.
5. Williamson J.F. Monte Carlo-based dose-rate tables for the Amersham CDCS.J and 3M model 6500 ^{137}Cs tubes // *IJRO.* 1998. Vol. 41. P. 959–970.
6. Granero D., Perez-Calatayud J., Ballester F. Monte Carlo calculation of the TG-43 dosimetric parameters of a new BEBIG Ir-192 HDR source // *Radiotherapy & Oncology.* 2005. Vol. 76. P. 79–85.
7. Daskalov G.M., Loeffler E., Williamson J.F. Monte-Carlo aided dosimetry of a new high dose-rate brachytherapy source // *Med. Phys.* 1998. Vol. 25. P. 2200–2208.
8. Daskalov G. Erratum: “Monte-Carlo aided dosimetry of a new high dose-rate brachytherapy source [*Med. Phys.* 25, 2200-2208 (1998)]” // *Med. Phys.* 2000. Vol. 27.
9. Wang R., Sloboda R.S. Monte Carlo dosimetry of the VariSource high dose rate ^{192}Ir source // *Med. Phys.* 1998. Vol. 25. P. 415–423.
10. Granero D., Perez-Calatayud J., Ballester F. Monte Carlo study of the dose rate distributions for the Ir2.A85-2 and Ir2.A85-1 Ir-192 afterloading sources // *Med. Phys.* 2008. Vol. 35. P. 1280.

UNCERTAINTY OF THE RADIAL DOSE FUNCTION OF BRACHYTHERAPY SOURCES APPROXIMATION WITH POLINOMIALS OF DEGREES 3–5

*A.V. Belousov, A.A. Belianov, A.P. Chernyaev
M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Quality assurance of brachytherapy means providing high precision of absorbed dose determination, and therefore high precision of radial dose function (RDF) approximation. Quality of RDF fitting with polynomials of degrees 3–5 was investigated. Statistical processing was conducted with non-linear least square method. With required relative error of fitting to be less than $\pm 25\%$ at the 10 cm and more distance from a source, the best choice for approximation of RDF is polynomial of degree 3.

Key words: *brachytherapy, radial dose function, polinomial approximation*

E-mail: belousovav@physics.msu.ru